Devoir sur Table 5

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
— Mise en évidence des résultats
— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1
(*CCINP PC 2019*)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \qquad (E)$$

Partie I — Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Partie II — Solutions de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

6. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.
7. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \tag{E_1}$$

8. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

9. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Partie III — Solutions de (E) sur $]0,+\infty[$

10. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2

(Concours ATS 2004)

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note I, J et $M(a,b,c)$ les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. $j^2 = \bar{j} = \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

1. Calculer J^2 et J^3.
2. Déterminer les valeurs propres de J. La matrice J est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est-elle sur le corps $\mathbb{R}$?
3. Pour chaque valeur propre de J déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice P de passage à une base de vecteurs propres.
4. Exprimer la matrice $M(a,b,c)$ à l'aide des matrices I, J et J^2. En déduire que $H = \{M(a,b,c)\ ,\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Précisez la dimension de H.
5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de J sont aussi vecteurs propres de J^2 ainsi que de $M(a,b,c)$. En déduire les valeurs propres de $M(a,b,c)$ à l'aide de celles de J, puis en fonction du nombre complexe j.
6. Montrer que tout élément de H est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $M(a,b,c)$ en fonction de la matrice P de la question 3. et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.
7. On suppose ici que les coefficients (a,b,c) sont réels.
   (a) Montrer que toutes les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$ ainsi que les *sous-espaces propres réels* associés.

Partie II

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On note Id l'endomorphisme identité de E. Dans cette partie, on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $M(a,b,c)$, en supposant que les coefficients (a,b,c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

1. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1.

   Préciser les sous-espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.
2. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0.

   Préciser les sous-espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.
3. (a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une rotation ?

   (b) Montrer que J et J^2 sont des matrices de rotation de E, préciser le cosinus de leurs angles de rotation.

   (c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2+b^2+c^2=1$ et $a+b+c=1$. En déduire que $ab+bc+ca=0$.

   Préciser l'axe de rotation ainsi que le cosinus de son angle de rotation en fonction de (a,b,c).

Exercice 3

(Banque PT, Maths A 2023)

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0,1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1-p$.

Partie I — Étude du jeu de lancer

1. On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire T ?

   On explicitera la loi sans démonstration.
2. On effectue une infinité de lancers. Calculer la probabilité de réussir au moins un panier.
3. L'organisateur du jeu ne connait pas la valeur de p et souhaite en connaitre une valeur approchée. Pour cela il observe $N \in \mathbb{N}^*$ lancers et note le nombre S_N de paniers réussis.

   (a) Quelle est la loi de S_N ? On explicitera la loi en justifiant brièvement la réponse.

   (b) Montrer que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$

   (c) Montrer que pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4N\varepsilon^2}$

Partie II — Un deuxième jeu

Le joueur met une pièce de 1 euro dans un sac à chaque lancer du ballon. Une fois le panier réussi, l'organisateur organise un deuxième jeu :

- L'organisateur enlève une pièce de 1 euro, qu'il garde pour lui, et la remplace par une pièce noire qui donne droit à $M \geqslant 2$ euros.
- Le joueur tire une pièce du sac.
- L'organisateur conserve les autres pièces du sac.

On rappelle que la variable T a été définie à la question 1 .

4. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'événement $(T = n)$ est réalisé : il y a donc n pièces dans le sac : $n-1$ pièces de 1 euro et la pièce noire.

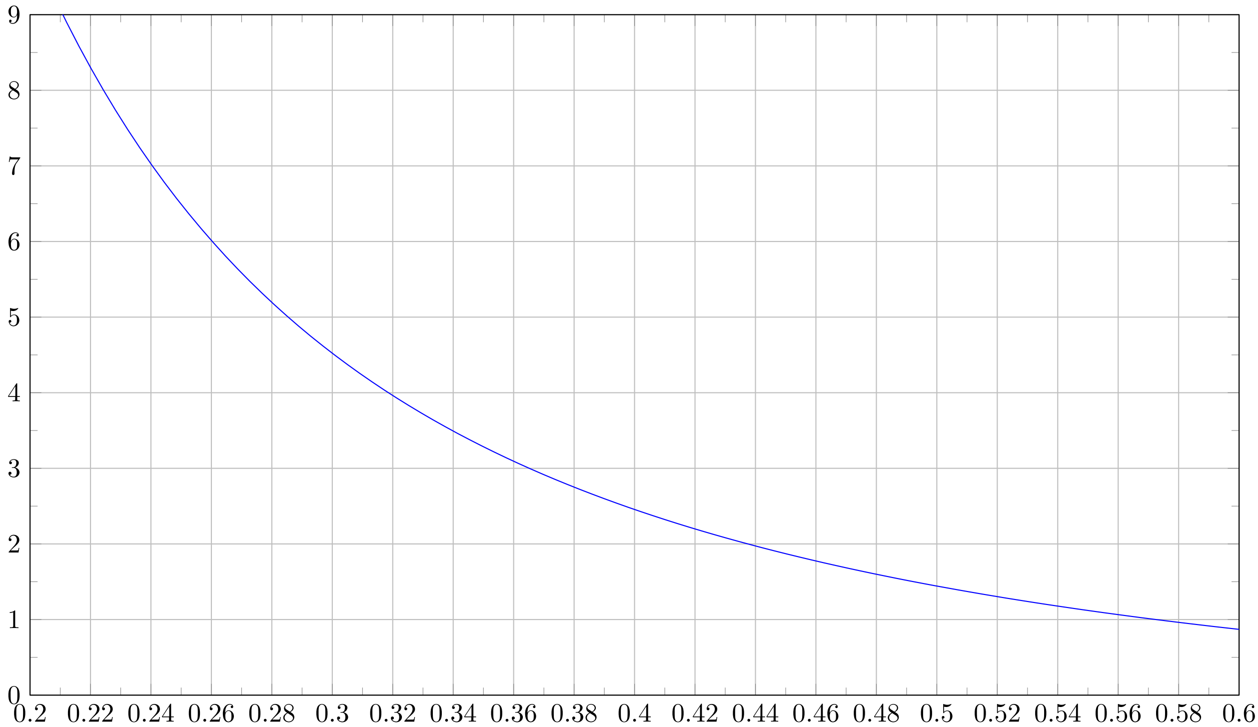
   On note G_n la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur.

   (a) Vérifier que $G_n(\Omega) = \{n-M, n-1\}$, puis donner la loi de G_n.

   (b) Calculer l'espérance de G_n.
5. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$.

   On pourra utiliser ces résultats dans les calculs des questions suivantes.

6. On note A l'événement « tirer la pièce noire ».
   (a) Exprimer pour $n \in N^*$ la valeur de $\mathbb{P}_{(T=n)}(A)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilité totales, dont on justifiera l'utilisation, montrer que
$$\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$
7. On note G la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur après ce deuxième jeu.
   (a) Montrer que $G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1 - M\}$.
   (b) Donner pour $n \in N^*$ et $k \in G(\Omega)$ la valeur de $\mathbb{P}_{(T=n)}(G = k)$.
   On distinguera les cas $k = n - 1, k = n - M$ et $k \notin \{n - 1, n - M\}$.
   (c) En déduire que la loi de G est donnée par : pour tout $k \in G(\Omega)$,
$$\mathbb{P}(G = k) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1} pq^k + \dfrac{1}{k+M} pq^{k+M-1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{1}{k+M} pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$
8. Calcul de l'espérance de G.
   (a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{E}\left(G_n\right) \mathbb{P}(T = n)$ est convergente.
   (b) On admet qu'alors G admet une espérance et
$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(G_n\right) \mathbb{P}(T = n)$$
   Calculer $\mathbb{E}(G)$, que l'on exprimera en fonction de p et M uniquement.
9. Voici un extrait de la courbe représentative de la fonction $\psi : p \mapsto \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 \dfrac{1}{\ln \frac{1}{p}}$.



On dira que le jeu est rentable pour l'organisateur lorsque son espérance de gain est positive. Dans les questions suivantes, on justifiera les résultats obtenus.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \psi(p) \geqslant M - 1$.
   (b) L'organisateur sait que $p = 0.3$. Quelles valeurs de M peut-il choisir pour que le jeu soit rentable ?
   (c) L'organisateur souhaite choisir $M = 8$ euros. Quelle valeur maximale de p doit-on avoir pour que ce jeu reste rentable ?
   (d) Pour quelles valeurs de p le jeu ne peut pas être rentable ?